ЗН

УДК 519.876.5

Б.Б. Нестеренко, М.А. Новотарский
Институт математики НАН Украины, г. Киев, Украина
model@imath.kiev.ua

Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах

Рассмотрены принципы структурной организации двумерных дискретных клеточных нейронных сетей, ориентированных на моделирование сложных физических процессов путем численного решения уравнений математической физики. Предложено использовать структуру оптимальных двумерных циркулянтных графов как базовую структуру клеточных нейронных сетей, что обусловило создание алгоритмов оптимальной маршрутизации. Разработан алгоритм прокладки оптимального прямого и альтернативного маршрутов между двумя произвольными нейронами клеточной нейронной сети.

Введение

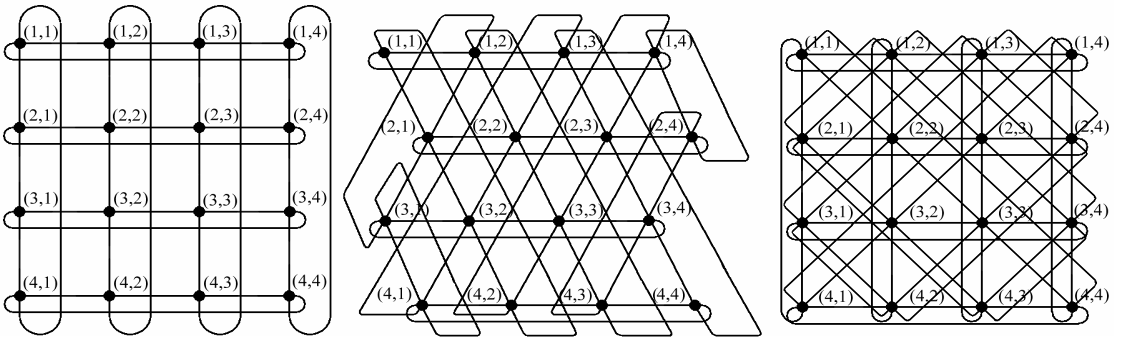
Клеточные нейронные сети (КНС), впервые опубликованные в [1], [2], сразу же получили широкое признание как парадигма искусственных нейронных сетей, ориентированных на параллельные асинхронные вычислительные процессы. За последние годы создано множество алгоритмов обработки изображений, распознавания образов, оценки динамики механических систем и др., успешно реализованных на клеточных нейронных сетях. Отличительной чертой этих алгоритмов можно считать возможность декомпозиции глобальной задачи на множество локальных задач, каждая из которых выполняется отдельным клеточным нейроном КНС. Свойство декомпозиции характерно также для методов решения краевых задач, что послужило обоснованием применения КНС для их реализации.

Постановка задачи при этом сводится к разбивке области решения на отдельные зоны, каждая из которых соответствует одному нейрону клеточной нейронной сети. Локальные связи между нейронами КНС задают структурирование зон, а метод вычислений определяет динамику взаимодействия. Оптимальный режим работы клеточной нейронной сети обеспечивается в случае, когда структура необходимых взаимодействий, определяемая методом решения задачи, совпадает со структурой межнейронных связей. Однако использование такого подхода может существенно снизить область применения КНС. В этой связи большой актуальностью обладают подходы, обеспечивающие высокую производительность КНС на нелокальных задачах за счет использования транзитных пересылок данных с учетом оптимальной прокладки маршрутов этих пересылок.

Принципы структурной организации клеточных нейронных сетей

Как правило, при моделировании сложных физических процессов применяют численные методы, суть которых состоит в формировании итерационного процесса на основе получения информации о результатах вычислений на определенном подмножестве узлов дискретизации области решения краевой задачи. Очевидно, что для таких вычислений наилучшим образом подходят топологии, базирующиеся на регу-

лярных графах [3]. На рис. 1 показаны примеры возможных локальных связей двумерных регулярных графов. Для определения количества возможных каналов локальных коммуникаций при реализации параллельных алгоритмов на КНС для каждого клеточного нейрона, размещенного в вершине (i, j), задают множество координат соседних нейронов $H_{i,j}$, мощность которого называют индексом окружения $\alpha_{i,j}$. Гомогенные клеточные сети представляют собой двумерные развертки торов, характеризующиеся постоянным индексом окружения для каждого клеточного нейрона. Например, диаметр однородного графа для структуры, показанной на рис. 1а), $d = \sqrt{N}$, а среднее расстояние $m = 2\left\lfloor \frac{\sqrt{N}}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{\sqrt{N}+1}{2} \right\rfloor \frac{\sqrt{N}}{N-1}$, где N – общее количество узлов [4].



а) б) в)

Рисунок 1 – Гомогенные структуры КНС

Однако при условии использования сложных многоточечных вычислительных шаблонов не всегда возможно или целесообразно использовать структуру межнейронных связей, однозначно соответствующую структуре шаблона. В этом случае будем применять механизмы транзитной передачи данных через соседние узлы, которые базируются на алгоритмах маршрутизации. Для оптимизации такой передачи используем топологии циркулянтных графов [5], которые характеризуются лучшим диаметром и средним расстоянием в сравнении с рассмотренными. В соответствии с [6], циркулянтный граф $G(N; s_1, s_2, \cdots, s_n)$ состоит из N вершин, помеченных $0, 1, \cdots i, \cdots, N-1$. С каждой вершиной i соотнесено множество ребер, соединяющих ее с множеством вершин

$$\{(i \pm s_1) \bmod N, (i \pm s_2) \bmod N, \cdots, (i \pm s_n) \bmod N\}.$$

Множество чисел $S = \{s_i\}_{i=1}^{n}$ графа $G(N; S)$ соответствует условиям:

1. Для элементов множества S справедливо соотношение $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n \le \frac{N}{2}$.

2. Значения элементов множества S устанавливаются в соответствии с минимальным диаметром d графа $G(N; S)$, определяемого из выражения:

$$d(G(N; S)) = \left(\max_{x,y} (d_{xy}) \middle| 0 \le x \le n, 0 \le y \le n, x \ne y \right), \quad (1)$$

где d_{xy} – длина кратчайшего пути между вершиной x и вершиной y.

Пусть $D(N) = \left(\min_{S} (d(G(N; S)))\right)$ – минимальная точная нижняя грань диаметра графа $G(N; S)$, т.е. $\{d(G(N; S))\} \ge D(N)$. Тогда оптимальным циркулянтным графом будем называть граф $G(N; S)$, для которого справедливо равенство $D(N) = d(G(N; S))$.

Таким образом, проблема эффективной организации параллельных вычислений на клеточных сетях сводится, прежде всего, к построению оптимальных циркулянтных графов этих сетей.

Оптимальные циркулянтные графы для двумерной клеточной нейронной сети

Рассмотрим семейство циркулянтных графов [7] степени 4, характеризующихся количеством вершин графа $N \geq 64$, пронумерованных с помощью последовательности целых чисел $0, \cdots, N-1$. Из i-й вершины данного графа, $0 \leq i \leq N-1$, выходят четыре ребра, связывающие эту вершину с вершинами

$$\{(i+s_1) \bmod N, (i-s_1) \bmod N, (i+s_2) \bmod N, (i-s_2) \bmod N\}.$$

Значения элементов множества $S = \{s_1, s_2\}$ определяются зависимостями $s_1 = \sqrt{N}$, $s_2 = \dfrac{\sqrt{N}}{2} - 1$.

Опираясь на теорему об оптимальности циркулянтных графов [7], можно показать, что данный граф является оптимальным, т.е. его диаметр равняется минимальной точной нижней грани диаметров для данного типа графов и определяется по формуле:

$$d(G(N; s_1, s_2)) = \frac{3\sqrt{N}}{4}. \quad (2)$$

Основным преимуществом графов данного типа есть то, что они образуют семейство квадратных структур $N = n \times n$ с размерностью стороны $n = 2^i$, где $i = 3,4,5...$ Пример циркулянтного графа $G(64;8,3)$ показан на рис. 2.

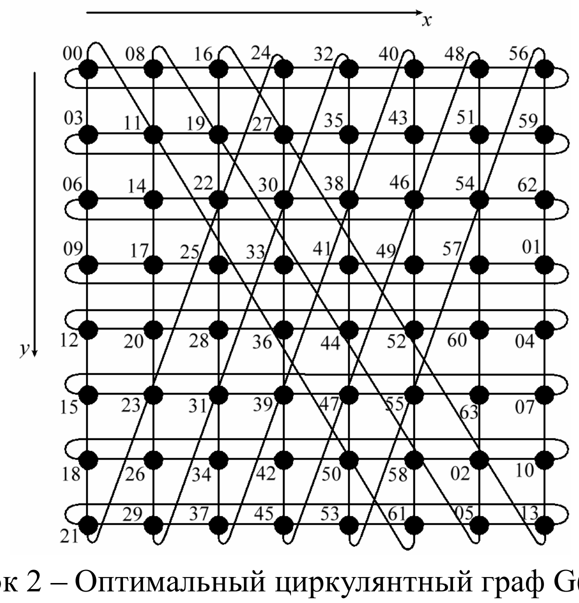


Рисунок 2 – Оптимальный циркулянтный граф G(64;8,3)

Преимущество топологии циркулянтных графов по сравнению с рассмотренными гомогенными структурами заключается в наличии связей, обеспечивающих сдвиги по одной из координат, и тем самым уменьшающих максимальный диаметр графа. Принцип нумерации вершин определяется функцией достижимости $f_N : Z^2 \to V$, которая позволяет определить номер вершины $f_N(x.y)$, достижимой из вершины 0

путем выполнения последовательности переходов x и y, $(x, y) \in Z^2$, вдоль ребер графа $G_N(N; S)$:

$$f_N(x, y) = (xs_1 + ys_2) \bmod N . \qquad (3)$$

Множество вершин D_k, достижимых вследствие выполнения m шагов от вершины 0, будем называть пошаговым множеством.

$$D_k = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le k\}.$$

Для того чтобы воспользоваться преимуществами топологии циркулянтных графов, необходимо разработать алгоритм маршрутизации сообщений в данном типе графов. Для этого представим граф $G(64;8,3)$ в виде циркулянтного кольцевого графа (рис. 3).

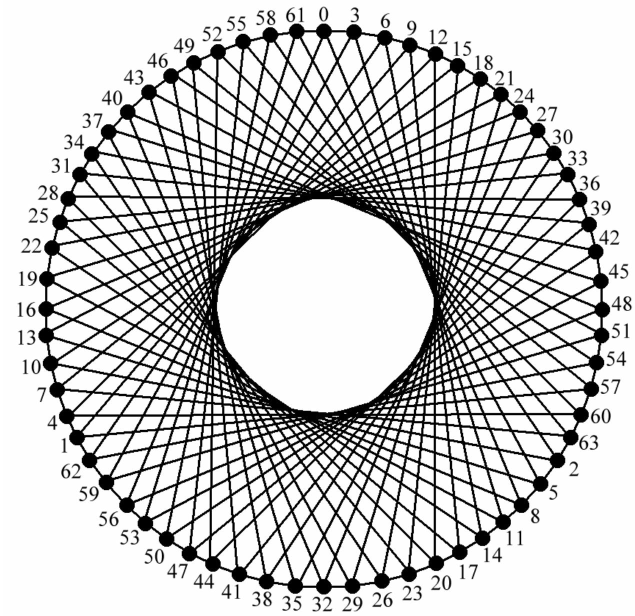


Рисунок 3 – Циркулянтный кольцевой граф G(64;8,3)

Из рис. 3 видно, что каждая вершина данного циркулянтного графа является одновременно элементом двух структурных кольцевых образований. Первое кольцо с шагом $(i \pm 3) \bmod 64$ объединяет все вершины графа. В данной топологии существует также множество из восьми сепаратных колец, объединяющих вершины с шагом $(i \pm 8) \bmod 64$. Опираясь на эту структурную особенность графа $G(N; S)$, можем утверждать, что существует два основных варианта попадания с одной вершины рассматриваемого циркулянтного графа в произвольную другую вершину. Каждый из этих вариантов имеет 4 модификации в зависимости от направления движения по кольцу. Таким образом, алгоритм выбора пути из вершины i в вершину j определяется из совокупности диафантовых уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} (i + 8(k_x)_1) \bmod 64 = (j + 3(k_y)_1) \bmod 64, \\ (i + 8(k_x)_2) \bmod 64 = (j - 3(k_y)_2) \bmod 64, \\ (i - 8(k_x)_3) \bmod 64 = (j + 3(k_y)_3) \bmod 64, \\ (i - 8(k_x)_4) \bmod 64 = (j - 3(k_y)_4) \bmod 64. \end{array}\right.$$

Эти уравнения построены на базе утверждения о том, что всегда существуют четыре вершины, в которых пересекаются маршруты движения при передвижении из вершины i по соответствующему кольцу с шагом 8 и при передвижении из вершины j по кольцу с шагом 3. Альтернативный путь образуется в результате передвижения из вершины i по кольцу с шагом 3 к пересечению данного кольца с соответствующим кольцом с шагом 8, включающим вершину j. Итак, в общем случае для циркулянтного графа $G(N;s_1,s_2)$ существуют две совокупности диафантовых уравнений.

Первая совокупность соответствует прокладке маршрутов к общей вершине при движении по кольцу с шагом s_1 от вершины i и движении по кольцу с шагом s_2 от вершины j:

$$\begin{cases} \left(i+s_1(k_x)_1\right)\bmod N=\left(j+s_2(k_y)_1\right)\bmod N, \\ \left(i+s_1(k_x)_2\right)\bmod N=\left(j-s_2(k_y)_2\right)\bmod N, \\ \left(i-s_1(k_x)_3\right)\bmod N=\left(j+s_2(k_y)_3\right)\bmod N, \\ \left(i-s_1(k_x)_4\right)\bmod N=\left(j-s_2(k_y)_4\right)\bmod N. \end{cases} \tag{4}$$

Вторая совокупность диафантовых уравнений описывает прокладку альтернативного маршрута через общую вершину при движении по кольцу с шагом s_2 от вершины i и движении по соответствующему кольцу с шагом s_1 от вершины j:

$$\begin{cases} \left(i+s_2(k'_y)_1\right)\bmod N=\left(j+s_1(k'_x)_1\right)\bmod N, \\ \left(i+s_2(k'_y)_2\right)\bmod N=\left(j-s_1(k'_x)_2\right)\bmod N, \\ \left(i-s_2(k'_y)_3\right)\bmod N=\left(j+s_1(k'_x)_3\right)\bmod N, \\ \left(i-s_2(k'_y)_4\right)\bmod N=\left(j-s_1(k'_x)_4\right)\bmod N. \end{cases} \tag{5}$$

Решения совокупностей уравнений (4) и (5) образуют множества пар

$$\left\{(k_x,k_y)_1,(k_x,k_y)_2,(k_x,k_y)_3,(k_x,k_y)_4\right\} \text{ и } \left\{(k'_x,k'_y)_1,(k'_x,k'_y)_2,(k'_x,k'_y)_3,(k'_x,k'_y)_4\right\},$$

формирующих последовательности транзитных вершин, которые необходимо пройти для передачи сообщения от вершины i к вершине j. Совокупности мощностей этих множеств составляют множества длин прямого и альтернативного маршрутов:

$$R=\left\{(k_x+k_y)_l \,\middle|\, l=1,\cdots,4\right\} \text{ и } R'=\left\{(k'_x+k'_y)_l \,\middle|\, l=1,\cdots,4\right\}.$$

Оптимальными будем называть маршруты, обеспечивающие переход от вершины i в вершину j за минимальное количество шагов, т.е.

$$r=\min_{l=1,4}\left\{(k_x+k_y)_l\right\} \text{ и } r'=\min_{l=1,4}\left\{(k'_x+k'_y)_l\right\}$$

Алгоритм маршрутизации, базирующийся на описанных принципах поиска оптимального маршрута и определяющий минимальное количество шагов $(x_{\min},y_{\min})$, которые нужно пройти от вершины n_s сначала по координате x с шагом s_1, а потом по координате y с шагом s_2, чтобы достичь вершины n_t, показан на рис. 4.

```
Procedure Routing_2D (N, s1, s2, ns, nt);
begin
  d:=3√N / 4 ;
  For l:=1 to 4 do
  begin
   For kx := 0 to d do
```

```
begin
 For k_y := 0 to d do
 begin
   If l in [1,2] then Sign_x = 1 else Sign_x = −1;
   If l in [1,3] then Sign_y = 1 else Sign_y = −1;
   Ring_x := (n_s + Sign_x · s_1 · k_x) mod N;
   Ring_y := (n_t + Sign_y · s_2 · k_y) mod N;
   Ring'_y := (n_s + Sign_y · s_2 · k_y) mod N;
   Ring'_x := (n_t + Sign_x · s_1 · k_x) mod N;
   If ((Ring_x = Ring_y) & (r > (k_x + k_y)) then
   begin
     r := (k_x + k_y); x_min := Sign_x * k_x; y_min := Sign_y * k_y;
   end;
   If ((Ring'_x = Ring'_y) & (r' > (k_x + k_y)) then
   begin
     r' := (k_x + k_y); x'_min := Sign_x * k_x; y'_min := Sign_y * k_y;
   end;
 end;
end;
end;
end.
```

Алгоритм маршрутизации в графе $G(N; s_1, s_2)$

Данный алгоритм одновременно определяет равнозначный предыдущему альтернативный маршрут $(y'_{\min}, x'_{\min})$. Этот маршрут задает количество шагов, которые нужно сделать от вершины i сначала по координате y с шагом s_2, а потом по координате x с шагом s_1, чтобы достичь вершины j.

В случае $x_{\min} > 0$ маршрут проходит в направлении возрастания номеров вершин, а при $x_{\min} < 0$ – в направлении убывания, начиная из начальной вершины n_s, через множество вершин: $\{(n_s + s_1 x_n) \bmod N | n = 1, \cdots, x_{\min}\}$.

При $y_{\min} > 0$ необходимо двигаться через множество вершин в направлении возрастания номеров, а при $y_{\min} < 0$ – в направлении убывания номеров:

$$\{(n_s + s_1 x_{\min} + s_2 y_n) \bmod N | n = 1, \cdots, y_{\min}\},$$

начиная с общей для двух колец вершины с номером $(n_s + s_1 x_{\min}) \bmod N$.

Таким образом, данный алгоритм обеспечивает построение оптимального маршрута на двумерном квадратном циркулянтном графе. Практические результаты его применения показывают, что топология циркулянтных графов дает возможность значительно улучшить коммуникационные свойства вычислительных структур.

Выводы

За последние годы существенно возрос интерес к нейронным сетям как к удобным средствам математического моделирования сложных физических процессов. Новой парадигмой нейронных сетей являются дискретные клеточные нейронные сети, в основу функционирования которых положены параллельные асинхронные численные методы решения уравнений математической физики. Эффективное использо-

вание упомянутых клеточных нейронных сетей зависит от ряда факторов, важнейшим среди которых является гибкая организация вычислений на основе взаимодействия между нейронами с отсутствующим непосредственным соединением. Реализация такого взаимодействия может быть достигнута в случае использования оптимальных циркулянтных графов для структурной организации клеточных нейронных сетей. Если структура клеточной нейронной сети соответствует заданному циркулянтному графу, то тогда открывается возможность применения алгоритмов прокладки оптимальных маршрутов для транзитных пересылок между нейронами. Предложенный алгоритм прокладки маршрута основывается на том факте, что путь между двумя вершинами циркулянтного графа всегда проходит через два кольца, состоящих из промежуточных вершин. Оптимальными являются маршруты, обеспечивающие минимальное количество шагов до точки пересечения колец от обеих вершин, включенных в коммуникационный процесс. В результате работы алгоритма определяется как прямой, так и альтернативный маршрут прокладки трассы, что дает возможность повысить надежность передачи сообщений. Практические результаты свидетельствуют о сокращении времени межнейронного взаимодействия при условии использования предложенного алгоритма маршрутизации.

Литература

1. Chua L.O. Cellular Neural Networks. Theory / L.O. Chua, L. Yang // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1988. – Vol. 35, № 10. – P. 1257-1272.
2. Chua L.O. The CNN paradigm / L.O. Chua, T. Roska // EEE Transactions on Circuits and Systems. – 1993. – Vol. 40, № 3. – P. 147-156.
3. Нестеренко Б.Б. Мультипроцессорные системы / Б.Б. Нестеренко, М.А. Новотарский. – Киев : Институт математики, 1995. – 408 с.
4. Stephan F.C. On Optimizing Diameter and Average Distance of Directed Interconnected Network / F.C. Stephan, H. Braun //IEEE Transactions on Computers. – 1993. – Vol. 42, № 3. – P. 353-358.
5. Монахова Э.А. Циркулянтные сети связи вычислительных систем: структуры и обмены / Э.А. Монахова // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета. – 2005. – С. 175-181.
6. Монахова Э.А. Алгоритмы межмашинных взаимодействий и реконфигурации графов связей в вычислительных системах с программируемой структурой / Э.А. Монахова // Вычислительные системы. – 1982. – № 94. – С. 81-102.
7. Beivide R. Optimal Distance Networks of Low Degree for Parallel Computers / [Beivide R., Herrada E., Balcazar J.L., Arruabarrena A.] // IEEE Transactions on Computers. – 1991. – Vol. 40, № 10. – P.1109-1124.

Б.Б. Нестеренко, М.А. Новотарський

Кліткові нейронні мережі на циркулянтних графах

Розглянуто принципи структурної організації двовимірних дискретних кліткових нейронних мереж, орієнтованих на моделювання складних фізичних процесів шляхом чисельного розв'язування рівнянь математичної фізики. Запропоновано використання структури оптимальних двовимірних циркулянтних графів як базової структури кліткових нейронних мереж, що дало можливість створення алгоритмів оптимальної маршрутизації. Розроблено алгоритм прокладки оптимального прямого й альтернативного маршрутів між двома нейронами кліткової нейронної мережі.

B.B. Nesterenko, M.A. Novotarskiy

Cellular Neural Networks with Circulant Graphs

Principles of the structural organization of the bidimentional discrete cellular neural networks focused on modeling of complex physical processes by the numerical solving of mathematical physics equations are considered. It is offered to use structure optimum bidimentional circulant graphs as a base structure for cellular neural networks that has enabled creations of algorithms for optimum routing. The algorithm of laying optimum direct and alternative routes between two neurons of a cellular neural network is developed.

Статья поступила в редакцию 12.05.2009.